Студенческий научный журнал «Грани науки». 2018. Т.6,№1. С.7-9.

УДК 160.1

О КРИТИКЕ ТЕОРЕМЫ К.ГЕДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ А.В. БЕССОНОВЫМ

Измайлова А.М.

ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет,

394018, г. Воронеж, Университетская площадь, д.1

e-mail: izmajlova.2012@mail.ru

поступила в редакцию 15 марта 2018 года

К числу наиболее известных результатов, полученных в ходе развития логики в 20 веке, относится, без сомнения, теорема Геделя о неполноте. Значимость теоремы Геделя обусловлена ее применимостью к такому важнейшему разделу человеческого знания, как математика, а также – в той мере, в какой на математике основаны различные естественные науки, – ко всем точным наукам вообще. По сути, согласно теореме Геделя, в принципе не может быть доказана безошибочность математики, а значит, и точных наук вообще. Помимо отмеченного основного применения теоремы Геделя, существует другое употребление их, уже в контексте философских исследований. Так некоторые авторы применяют ее в области философии сознания, утверждая, что человеческое сознание имеет неалгоритмическую природу [1,2].

Теорема Геделя [3] включает в себя две части. Согласно первой части, (которую иногда называют отдельной теоремой), в непротиворечивых формальных системах, содержащих арифметику, всегда находятся неразрешимые формулы, т.е. любая такая система оказывается неполна. При этом непротиворечивостью формальной системы называется тот факт, что в ней не доказуема ложь[1] ($\mathrm{Cons}\ S \leftrightarrow \nvdash$[2] $\ulcorner A \urcorner$, где Cons – непротиворечивость формальной системы S, а $\ulcorner A \urcorner$ - любое ложное предложение, соответственно). Полнотой формальной системы является доказуемость всех истинных утверждений в этой системе.

Неполнота рассматриваемой формальной системы, содержащей арифметику, доказывается с помощью конкретного примера: предложение, которое может быть сформулировано в этой системе, является истинным и не является доказуемым (это предложение приписывает самому себе недоказуемость)[3].

Вторая половина теоремы о неполноте гласит, что непротиворечивость рассматриваемой системы недоказуема ее средствами, т.е. в ней невыводима формула, утверждающая, грубо говоря, непротиворечивость самой S. (Формально это значит, что $\mathrm{Cons}\ S \rightarrow\ \nvdash \mathrm{Cons}\ S$). В ходе наших рассуждений именно она играет ключевую роль.

Доказательство тезиса второй половины опирается на доказанную в первой половине теоремы недоказуемость в рассматриваемой системе S предложения, утверждающего собственную недоказуемость. Грубо говоря, если бы система могла доказать свою непротиворечивость, то получилось бы (исходя из тезиса первой части), что в ней доказуемо предложение Геделя. Поскольку оно недоказуемо, недоказуема и непротиворечивость.

Несмотря на известность теорем о неполноте, по-прежнему существуют ученые, оспаривающие результаты, полученные Геделем. Одним из таких отечественных исследователей является А.В. Бессонов [4,5].

Настоящая работа ставит перед собой цель – попытаться продемонстрировать наличие серьезной ошибки в аргументации Бессонова.

1 Приводимое определение является семантическим, в оригинале статьи его нет, но оно соответствует нашей цели дальнейшего доказательства.

2 Данный символ обозначает тот факт, что в системе S недоказуемо некое утверждение.

3 Указанное предложение (предложение Геделя) говорит о самом себе, благодаря наличию у него определенного номера (приписывание которых становится возможным из-за того факта, что система содержит арифметику).

В своей статье Бессонов хочет показать, что теорема Геделя о неполноте содержит в себе некоторую ошибку, причем аргументация Бессонова носит косвенный характер. Он пытается опровергнуть следствие теоремы о неполноте, которое опирается на теорему Геделя

(1) Cons S→ ⊬ Cons S

и на определение непротиворечивости, т.е.

(2) Cons S ↔ ⊬ ⌜A⌝,

Поскольку из (2) следует, что недоказуемость непротиворечивости S означает недоказуемость недоказуемости ложной формулы ⌜A⌝, т. е.

(3) ⊬ Cons S → ⊬ ⊬ ⌜A⌝,

то, соединяя (1) и (3) можно получить (через гипотетический силлогизм) формулу:

(4) Cons S → ⊬ ⊬ ⌜A⌝.

Стратегия Бессонова заключается в том, что он пытается опровергнуть (4), т.е. показать, что при непротиворечивости S можно будет доказать недоказуемость формулы ⌜A⌝ (в качестве примера ⌜A⌝ он приводит ложное утверждение ⌜¬(0=0)⌝, а в качестве системы S рассматривает арифметику Пеано (PA)). Бессонов пишет:

> *Недоказуемость формулы ¬(0=0) при условии непротиворечивости PA доказывается совершенно элементарно методом от противного. Предположим, что формула ¬(0=0) доказуема. Тогда, учитывая ⊢(0=0), следовало бы ⊢(0=0)&¬(0=0), т.е. PA была бы противоречивой, что противоречит предположению.*
>
> *Мы пришли к противоречию: если PA непротиворечива, то из второй теоремы о неполноте следует несуществование финитного доказательства недоказуемости в PA формулы ¬(0=0). Но такое доказательство существует! [6].*

По мнению Бессонова, изложенное им доказательство опровергает формулу (4). В самом деле, делая допущение, что система непротиворечива, он показывает, что формула ⌜¬(0=0)⌝ не будет в ней доказуема, т. е. строит доказательство недоказуемости ложной формулы ⌜A⌝. Но, действительно ли Бессонов опроверг в приведенном рассуждении формулу (4)? Опровержением формулы (4) должна быть формула (5):

(5) Cons S → ⊢ ⊬ ⌜A⌝.

Доказал ли Бессонов формулу (5)? Очевидно, нет. Допущением его доказательства была непротиворечивость S, следовательно, мы имеем доказательство условной зависимости с антецедентом “Cons S”. Это утверждение (о непротиворечивости S) – часть доказанного тезиса. Значит, формализовав доказанный Бессоновым тезис мы получим:

(6) ⊢ (Cons S→ ⊬ ⌜A⌝)

Но доказанный тезис никак не противоречит (4)! Даже если доказательство Бессонова можно формализовать в системе S, наличие в ней этого доказательства никак предполагает наличие в ней доказательства:

(7) ⊢ ⊬ ⌜A⌝.

Действительно, система может доказать, что в случае ее непротиворечивости, в ней не было бы доказательства ложного предложения ⌜A⌝. Но система не может доказать свою непротиворечивость, а значит недоказуемость в ней ложного предложения ⌜A⌝.

Таким образом недостаток аргументации Бессонова в том, что он не дал внятного опровержения следствия (4), а всего лишь сконструировал уже имеющееся доказательство формулы (6), которая в свою очередь никак не противоречит самой теореме Геделя.

Список литературы

1) Пенроуз Р. Новый ум короля. – М.: Едиториал УРСС, 2003. 339 с.
2) Lucas J.R. Mind, Machines, and Godel // Philosophy. 1961. V.36. P.112-127.
3) Gödel K. Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I // Monatshefte fur Mathematik und Physik. 1931. Bd.38. S.173-198.
4) Бессонов А.В. К интерпретации теорем Гёделя о неполноте арифметики // Вестник Томского государственного университета. Серия: Философия. Социология. Политология. 2011. №4. С.177-189.

5) Бессонов А.В. О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Геделя о неполноте арифметики. I // Философия науки. 2014. №4(63). С.12-31.
6) Бессонов А.В. Вторая теорема Гёделя о неполноте не дезавуирует программу Гильберта // Логико-философские штудии. Том 13, №2. Спб.: Изд-во СПбФО, 2016. С.169-170.