

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ СО ВСЕМИ УПРАВЛЯЕМЫМИ КОЛЕСАМИ

Иванова А.С.

Набережночелнинский институт ФГАОУ ВПО Казанский (Приволжский) федеральный университет, 423810, г. Набережные Челны, пр. Мира, д.68/19

e-mail: nastena_07_1993@mail.ru

поступила в редакцию 10 декабря 2014 года

Аннотация

В работе рассмотрена модель движения автомобиля, и разработаны модели движения автомобиля со всеми управляемыми колесами. Разработана велосипедная модель и проведено сравнение велосипедной и четырехколесной моделей движения.

Ключевые слова: модель движения автомобиля, велосипедная модель автомобиля, автомобиль со всеми управляемыми колесами, цифровая модель движения автомобиля.

Введение. В современном, быстроразвивающемся мире автомобиль уже давно перестал быть роскошью. По статистике авто имеется у каждого четвертого жителя России, и темпы автомобилизации постоянно растут. В условиях рыночной экономики производителям постоянно приходится разрабатывать и внедрять всё новые комплексы, улучшающие характеристики автомобиля. Основным показателем качества автомобиля является безопасность движения. В свою очередь, большое влияние на безопасность движения автомобильного транспорта оказывает курсовая (или траекторная) устойчивость. Многие модели автомобилей в наше время оснащены системами курсовой устойчивости, которые обеспечивают водителю лучший контроль над поведением автомобиля, следя за тем, чтобы он перемещался в том направлении, куда указывает поворот руля.

Для того чтобы обеспечить движение в заданном направлении, водитель изменяет углы поворота колёс, поворачивая рулевое колесо в нужном направлении на некоторый угол. Однако это не гарантирует, что автомобиль будет двигаться строго по заданной траектории, так как в любой момент времени на него действуют различные возмущения, которые стремятся изменить его траекторию. К таким возмущениям можно отнести неровности дороги, ветер, препятствия на дороге [1].

Целью данной работы является разработка и исследование цифровой модели движения автомобиля со всеми управляемыми колесами.

В рамках работы необходимо решить следующие задачи:

1. изучение теории движения автомобиля;
2. построение математической модели движения автомобиля;
3. построение велосипедной математической модели движения автомобиля с двумя управляемыми колесами;
4. сравнение моделей;
5. анализ расхождения результатов.

В процессе выполнения работы была изучена теория движения автомобиля, а также разработана велосипедная модель автомобиля. Для требуемого типа движения была построена математическая модель. За основу был взят легковой автомобиль. Была описана требуемая система дифференциальных уравнений, которая в дальнейшем была использована при изучении движения автомобиля со всеми управляемыми колесами [2].

В результате численного моделирования были вычислены формулы для определения траектории движения автомобиля при разных углах поворота переднего и заднего колес. В работе были вычислены следующие модели:

- 1) велосипедная модель автомобиля;
- 2) велосипедная модель автомобиля с двумя управляемыми колесами;

3) четырехколесная (асимптотическая) математическая модель автомобиля со всеми управляемыми колесами;

В частности рассмотрены случаи автомобиля:

а) с двумя одинаковыми углами поворота переднего и заднего колес;

б) с двумя взаимно перпендикулярными управляемыми колесами.

В результате были получены формулы движения для всех типов моделей движения автомобиля.

1. **Велосипедная модель автомобиля.** Рассмотрим автомобиль, движущийся по горизонтальной, однородной, шероховатой плоской поверхности (дороге). Для описания его движения будем использовать "велосипедную" модель, в рамках которой два передних колеса заменяются одним эквивалентным передним колесом, два задних – одним задним. Переднее колесо является управляемым и связано с корпусом через механизм рулевого управления, ось вращения заднего колеса фиксирована в корпусе. Будем предполагать, что корпус и колеса модели являются абсолютно жесткими, и она не имеет боковых наклонов. "Велосипедная" модель часто используется для описания движений автомобиля, при которых можно пренебречь различиями между характеристиками сцепления правых и левых колес одной оси с дорогой [3]. Расчетная модель представлена на рисунке 1.

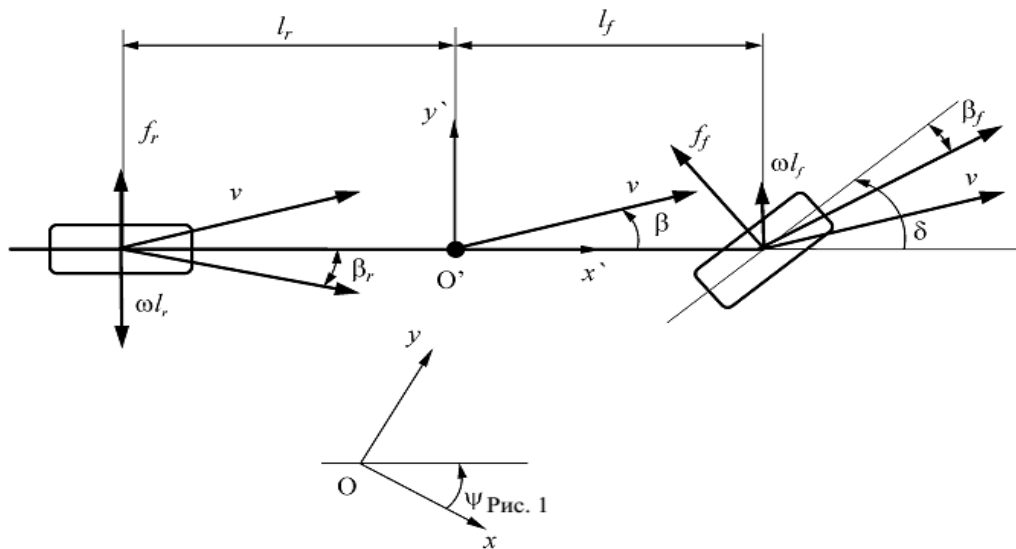


Рисунок 1. – "Велосипедная" модель автомобиля.

Свяжем с автомобилем строительную систему координат $x'O'y'$, начало которой совпадает с центром масс автомобиля, а ось x' направлена вдоль продольной оси симметрии. Положение автомобиля как твердого тела на плоскости однозначно определяется двумя координатами центра масс O' в неподвижной системе координат xOy и углом поворота оси $O'x'$ строительной системы координат относительно оси Ox неподвижной системы координат.

Пусть m – масса автомобиля, J – момент инерции автомобиля вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс, l_f и l_r – расстояния от центра масс до оси переднего колеса и до оси заднего колеса соответственно, v – линейная скорость центра масс, β – угол бокового скольжения автомобиля, δ – угол поворота переднего колеса, β_f и β_r – углы бокового скольжения переднего и заднего колес соответственно, φ – угол между осью $O'x'$ строительной и осью Ox неподвижной систем координат, ω – угловая скорость вращения вокруг центра масс, f_f и f_r – боковые силы, действующие на передние и задние колеса. Положительным направлением для всех углов является направление "против часовой стрелки".

Для углов бокового скольжения передних и задних колес из геометрических соображений (см. рисунок 1) можно получить соотношения:

$$\beta_f = \arctg\left(\frac{\vartheta \sin \beta + l_f \omega}{\vartheta \cos \beta}\right) - \delta = \alpha_f(\vartheta, \beta, \omega) - \delta,$$

$$\beta_r = \arctg\left(\frac{\vartheta \sin \beta - l_r \omega}{\vartheta \cos \beta}\right) = \alpha_r(\vartheta, \beta, \omega) \quad (1.1)$$

Рассмотрим уравнения, определяющие динамику движения системы в горизонтальной плоскости в проекциях на оси строительной системы координат:

$$m\dot{\vartheta}_{x'} - m\vartheta_{y'}\omega = f_{x'}, m\dot{\vartheta}_{y'} + m\vartheta_{x'}\omega = f_{y'}. \quad (1.2)$$

Уравнение вращательного движения вокруг центра масс имеет вид

$$J\dot{\omega} = M \quad (1.3)$$

Здесь $\vartheta_{x'} = \vartheta \cos \beta$ и $\vartheta_{y'} = \vartheta \sin \beta$ – проекции скорости центра масс на соответствующие координатные оси, $f_{x'}$ и $f_{y'}$ – проекции сил, действующих на автомобиль, а M – момент сил относительно центра масс.

Вычислив производные проекций скорости

$$\dot{\vartheta}_{x'} = \dot{\vartheta} \cos \beta - \vartheta \dot{\beta} \sin \beta, \dot{\vartheta}_{y'} = \dot{\vartheta} \sin \beta + \vartheta \dot{\beta} \cos \beta, \quad (1.4)$$

и подставив (4) в (2), можно получить

$$m\vartheta(\dot{\beta} + \omega) = -f_{x'} \sin \beta + f_{y'} \cos \beta, m\dot{\vartheta} = f_{x'} \cos \beta + f_{y'} \sin \beta. \quad (1.5)$$

Пусть F – движущая сила, создаваемая задними колесами. Тогда проекции сил, действующих на автомобиль имеют вид

$$f_{x'} = -f_f \sin \delta + F, f_{y'} = -f_f \cos \delta + f_r \quad (1.6)$$

а суммарный момент –

$$M_z = f_f l_f \cos \delta - f_r l_r \quad (1.7)$$

Подставив (1.6) в (1.5) с учетом уравнений связи между строительной и неподвижной системами координат получим:

$$\dot{\beta} = \frac{f_f \cos \delta + f_r}{m\vartheta \cos \beta} - \omega - \frac{\tan \beta}{\vartheta} \dot{\vartheta},$$

$$J\dot{\omega} = f_f l_f \cos \delta - f_r l_r,$$

$$\dot{\varphi} = \omega,$$

$$\dot{x} = \cos(\beta + \varphi),$$

$$\dot{y} = \sin(\beta + \varphi).$$

Система (1.8) описывает движение автомобиля при условии, что линейная скорость центра масс отлична от нуля и $|\beta| < \frac{\pi}{2}$.

В системе (1.8) управлениями можно считать угол поворота передних колес δ и ускорение $\dot{\vartheta}$. Для этого обозначим δ и $\dot{\vartheta}$ через u_1 и u_2 соответственно и добавим в систему (1.8) уравнение $\dot{\vartheta} = u_2$.

Согласно гипотезе Рокара [2], в диапазоне углов β_f, β_r от 0 до 5-8 градусов поперечные силы реакции f_f, f_r , действующие на передние и задние колеса, полагают равными

$$f_f = -c_f \beta_f, f_r = -c_r \beta_r \quad (1.9)$$

и направленными в сторону, противоположную поперечным составляющим скоростей колес. Здесь c_f и c_r - коэффициенты пропорциональности, характеризующие взаимодействие колес с дорогой.

Упростим систему (1.8) при условии, что угол поворота переднего колеса δ и угол бокового скольжения β достаточно малы и можно принять $\sin \beta \sim \beta, \cos \beta \sim 1, \sin \delta \sim \delta, \cos \delta \sim 1$.

Подставив в (1.8) соотношения (1.9), (1.10) и упростив первые два уравнения системы (1.8) с учетом сделанных предположений, получим

$$\dot{\beta} = -\frac{c_f(\alpha_f - \delta) + c_r \alpha_r}{m\vartheta} - \omega - \frac{\beta}{\vartheta} \dot{\vartheta} = -\frac{c_f \alpha_f + c_r \alpha_r}{m\vartheta} - \omega + \frac{c_f}{m\vartheta} u_1 - \frac{\beta}{\vartheta} u_2$$

и

$$J\dot{\omega} = -(c_f(\alpha_f - \delta)) l_f + c_r \alpha_r l_r = -c_f \alpha_f l_f + c_r \alpha_r l_r + c_f l_f u_1$$

Отметим, что и выражения (1) при малых углах можно упростить, приняв

$$\alpha_f = \frac{\vartheta\beta + l_f\omega}{\vartheta}, \alpha_r = \frac{\vartheta\beta - l_r\omega}{\vartheta} \quad (1.10)$$

Окончательно с учетом сделанных допущений система (1.8) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -\frac{c_f\alpha_f + c_r\alpha_r}{\vartheta} - \omega + \frac{c_f}{m\vartheta}u_1 - \frac{\beta}{\vartheta}u_2, \\ \dot{\omega} &= -\frac{l_f}{J}c_f\alpha_f + \frac{l_r}{J}c_r\alpha_r + \frac{l_f}{J}c_fu_1, \\ \dot{\vartheta} &= u_2 \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{x} &= \cos(\beta + \varphi), \\ \dot{y} &= \sin(\beta + \varphi). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Система (1.11) является аффинной системой с двумя управлениями.

2. Четырехколесная модель движения автомобиля. Четырехколесная модель автомобиля [4] образована корпусом, подрессоренной массой и четырьмя неподрессоренными массами, включающими колеса. Считается, что центры масс автомобиля и корпуса совпадают. Крепление каждой неподрессоренной массы к корпусу автомобиля моделируется вязкоупругим элементом, имитирующим подвеску, включающую рессору и амортизатор. Предполагается, что составляющие подвески могут деформироваться только вдоль вертикальной оси. Продольные плоскости симметрии колес перпендикулярны соответствующим осям вращения этих колес, что эквивалентно пренебрежению углами развала и схождения. Движение происходит по горизонтальной однородной шероховатой плоскости (дороге). Будем придерживаться обозначений, принятых в 1.

Введем следующие правые системы координат. Система $O_{x_0y_0z_0}$ является неподвижной: плоскость $O_{x_0y_0}$ совпадает с опорной плоскостью, ось O_{z_0} направлена вертикально вверх. Подвижная система $C_{x_1y_1z_1}$ имеет начало в центре масс C автомобиля: ось C_{x_1} направлена вперед по ходу движения, ось C_{z_1} – вертикально вверх. Подвижная система C_{xyz} жестко связана с корпусом автомобиля, ось C_x направлена вперед по его продольной оси симметрии, ось C_y направлена влево. Положение системы $C_{x_1y_1z_1}$ относительно трехгранника $O_{x_0y_0z_0}$ задается координатами X, Y, Z точки C и углом поворота Ψ (курса) вокруг оси C_{z_1} . Положение системы C_{xyz} относительно трехгранника $C_{x_1y_1z_1}$ задается двумя углами поворотов Γ (крена) и θ (тангажа) вокруг осей C_x и C_y соответственно. Системы координат $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ связаны с колесными дисками. Здесь и далее индексы i задают переднюю ($i=1$) и заднюю ($i=2$) оси, индексы j – левый ($j=1$) и правый ($j=2$) борта по ходу движения автомобиля. Точка A_{ij} лежит на пересечении оси вращения ij -го колеса с продольной плоскостью симметрии его пневматика. Для задних колес ориентация осей трехгранников $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ совпадает с ориентацией осей трехгранника $C_{x_1y_1z_1}$. Для передних колес положения систем $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ относительно трехгранника $C_{x_1y_1z_1}$ задаются углами поворота колес Δ_{11} и Δ_{12} (рисунок 2).

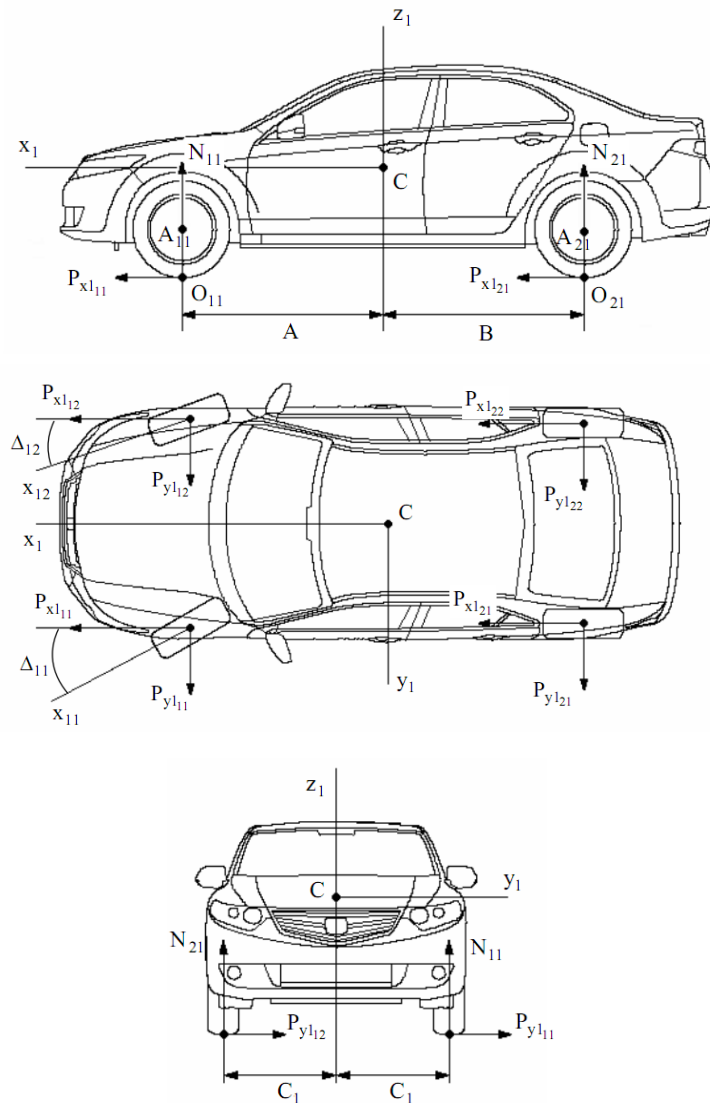


Рисунок 2. – Системы координат и контактные силы для четырехколесной модели автомобиля.

3. Численное исследование "велосипедной" и четырехколесной моделей. Проведем численное сравнение "велосипедной" и четырехколесной моделей. Параметры систем зададим типовыми для легкового автомобиля. В качестве общих параметров "велосипедной" и четырехколесной моделей выберем $M=1000$ кг, $I_z=1000$ кг·м², $A=B=1,5$ м, $H=1$ м, $R=0,3$ м, $m=10$ кг, $\rho=\rho_{ij}=0,15$ м, $\varepsilon=0,1$. Для четырехколесной модели положим $\rho_x=0,5$ м, $\rho_x=1$ м, $C_1=C_2=1$ м, $C_{ij}=5 \cdot 10^4$ кг/с², $R_{ij}=10^3$ кг/с, $K_{zij}=3 \cdot 10^5$ кг/с², $Q_{ij}=3 \cdot 10^3$ кг/с ($i,j=1,2$). Предполагая внешние возмущения малыми, положим $F_x, F_y, M_z, F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}, F_{zij}$ равными нулю.

На рисунках 3-5 показаны типичные графики для случая разгона переднеприводного автомобиля на сухой асфальтовой дороге с достаточно высокой начальной скоростью и малым углом поворота передних колес $\Delta \sim \Delta_{11} \sim \Delta_{12}$. Было принято $\alpha_{xi} = \alpha_{yi} = 0,8, \alpha_{xij} = \alpha_{yij} = 0,8, L_1 = 300$ Н·м, $L_{ij} = 150$ Н·м, $L_2 = L_{2j} = 0$ Н·м, $\Delta = 0,05$. Предполагая, что центр переднего колеса "велосипедной" модели находится на пересечении передней оси и продольной плоскости симметрии корпуса автомобиля, положим, аналогично последнему уравнению

$$\tan \Delta_{11} = \frac{(A+B) \tan \Delta}{A+B-C_1 \tan \Delta}, \tan \Delta_{12} = \frac{(A+B) \tan \Delta}{A+B+C_1 \tan \Delta}.$$

Зададим $V_x(0) = 20$ м/с, $\Omega_i(0) = \Omega_{ij}(0) = V_x(0)/R$; остальные начальные условия положим равными нулю.

На рисунке 3 показано изменение во времени величины угла крена Γ для четырехколесной модели. На рисунке 4 представлено изменение во времени T величин боковых контактных сил P_y на передних (а) и задних (б) колесах (для "велосипедной" модели приведены половины величин боковых контактных сил; для четырехколесной модели сплошной линией отмечены графики, отвечающие левым колесам, пунктирной – правым колесам соответствующей оси). На рисунке 5 показаны последовательные положения продольной оси симметрии автомобиля на плоскости X, Y .

Анализ графиков показывает, что угол крена при заданном режиме движения является достаточно малым (порядка 10^{-2}) и после истечения времени переходного процесса остается практически неизменным, что не приводит к значительному перераспределению нагрузки между левыми и правыми колесами одной оси; различия между боковыми контактными силами для правых и левых колес одной оси четырехколесной модели являются приемлемыми. При этом боковые контактные силы на колесах "велосипедной" модели близки к соответствующим средним значениям контактных сил четырехколесной модели, а различия для последовательных положений продольной оси автомобиля и угловой скорости его корпуса в силу указанных моделей незначительны.

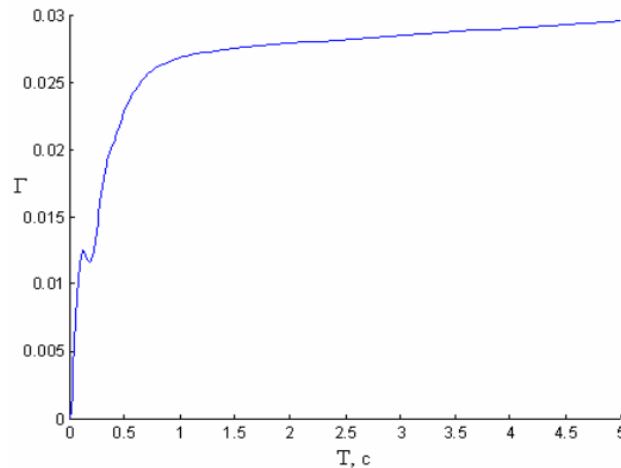


Рисунок 3. – Зависимость угла крена корпуса четырехколесной модели переднеприводного автомобиля от времени при разгоне на сухой асфальтовой дороге с малым углом поворота передних колес. $L_{ij} = 150\text{Н} \cdot \text{м}$, $\Delta = 0,05$, $VV_x(0) = 20\text{м/с}$.

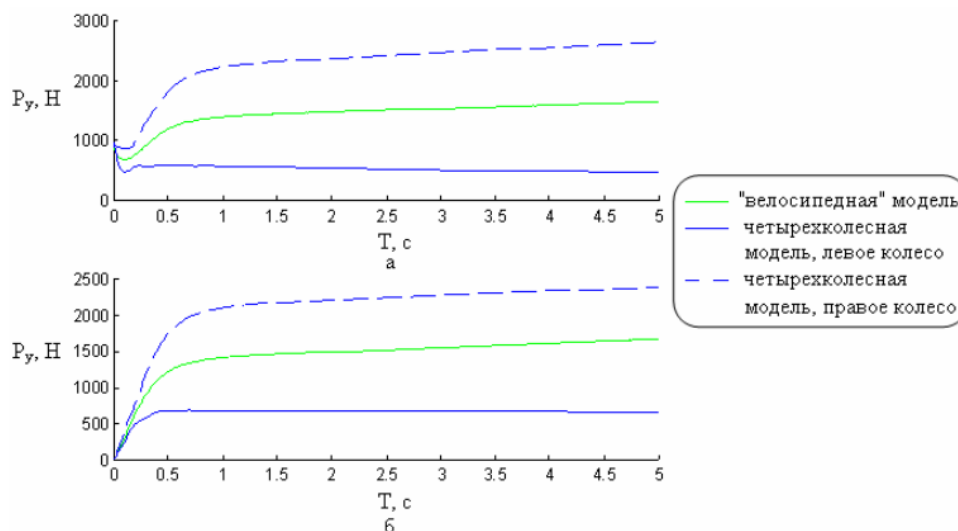


Рисунок 4. – Зависимость боковых контактных сил от времени на передних (а) и на задних (б) колесах при разгоне переднеприводного автомобиля на сухой асфальтовой дороге с малым углом поворота передних колес. $L_{ij} = 150\text{Н} \cdot \text{м}$, $\Delta = 0,05$, $VV_x(0) = 20\text{м/с}$ (для «велосипедной» модели $L_1 = 300\text{Н} \cdot \text{м}$ и приведены половины величин боковых контактных сил).

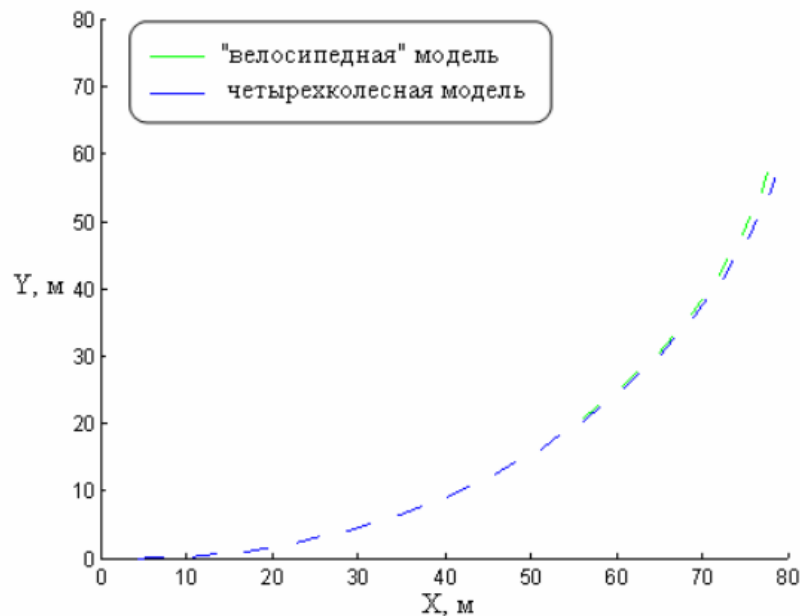


Рисунок 5. – Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при разгоне на сухой асфальтовой дороге с малым углом поворота колес. $L_{ij} = 150\text{Н} \cdot \text{м}$, $\Delta = 0,05$, $V_{x}(0) = 20\text{м/с}$ (для «велосипедной» модели $L_1 = 300\text{Н} \cdot \text{м}$).

Заключение. Исследование "велосипедной" модели автомобиля позволило разработать алгоритм понижения порядка уравнений колесных транспортных средств, движущихся при наличии малых различий между характеристиками сцепления правых и левых колес одной оси с дорогой. Асимптотическая модель, пригодна для описания продольного движения колес и бокового движения точек контакта колес с дорогой (увод автомобиля). Проведены оценки точности и пределов применимости асимптотических и велосипедных моделей автомобиля. Построенные модели могут быть использованы для синтеза законов управления автомобилем и формирования алгоритмов работы систем безопасности [5].

Проведено численное сравнение построенной велосипедной модели с асимптотической моделью, составленной в предположении малости угла поворота передних управляемых колес автомобиля. Показано, что точности и пределы применимости моделей соответствуют теоретическим оценкам; велосипедная модель сравнима по точности с асимптотическими моделями движений. Рассмотрено влияние углов поворотов передних и задних колес на траекторию движения автомобиля. В целом, при сравнении результатов движения автомобилей велосипедной и четырехколесной моделей автомобиля различия в траектории движения в пределах допустимой точности.

Список литературы

- 1) Новожилов И.В., Кручинин П.А., Лебедев А.В., Влахова А.В., Боуш Р.Л. Модель движения автомобиля как основа математического обеспечения тренажерного комплекса водителя. // Мехатроника, автоматизация, управление. №6. 2007. С.31-36.
- 2) Новожилов И.В., Павлов И.С. Приближенная математическая модель колесного экипажа. // Изв. РАН. МТТ. 1997. №2. С.196-204.
- 3) Павлов И.С. Математическое моделирование пространственного движения автомобиля. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: 1998. 188 с.
- 4) Смирнов И.А. Математическое моделирование заноса автомобиля. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011.
- 5) Бурдаков С.Ф., Мирошник И.В., Стельмаков Р.Э. Системы управления движением колесных роботов. Спб.: Наука, 2001. 227 с.